QUASI-INTERPOLANTS SPLINES : EXEMPLES ET APPLICATIONS

Paul Sablonnière

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES : EXEMPLES ET APPLICATIONS

Paul Sablonnière, INSA de Rennes.

CONGRÈS RFMAO, RABAT 19-21 septembre 2005

Résumé : Un **quasi-interpolant spline** (abréviation QI) est un opérateur d'approximation obtenu comme combinaison linéaire de fonctions à support borné (B-splines) :

$$Qf = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(f) B_\alpha$$

Le coefficient $\mu_\alpha(f)$ de la B-spline B_α est une forme linéaire agissant sur la fonction f à approcher **dans un voisinage du support de B_α**. Le grand avantage de cette approche est que le calcul d'un QI est direct et **ne nécessite pas la résolution d'un système d'équations**, contrairement à ce qui se passe pour un interpolant. C'est particulièrement intéressant en dimension 2 ou 3, où le nombre de B-splines peut être relativement grand. Dans cet article, je décris **quelques exemples de QIs** de différents types sur des espaces de splines à une ou deux variables. Puis je présente **quelques applications en approximation et en analyse numérique**.

AMS classification : 65D (analyse numérique et CAGD).

1 Introduction, définitions et notations

Soit $\mathbb{F}$ un espace de fonctions, $\mathbb{S}$ un espace de splines polynômiales d'une ou plusieurs variables et $\mathbb{P}_n$ l'espace des polynômes de *degré total* au plus égal à n. On suppose que $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{S}$ et $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{F}$. On suppose aussi que $\mathbb{S}$ est engendré par la famille de B-splines $\mathcal{B} = \{B_\alpha, \alpha \in A\}$. Pour tout $\alpha \in A$, B_α est une fonction à support borné désigné par $supp(B_\alpha)$. La famille A des indices est finie ou infinie suivant que l'on travaille sur un domaine borné ou sur l'espace entier. Un *quasi-interpolant* (abr. QI) est un opérateur $Q : \mathbb{F} \to \mathbb{S}$ de la forme

$$Qf = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(f) B_\alpha$$

ayant les propriétés suivantes:

(i) Q est un opérateur *exact sur* $\mathbb{P}_n$: $Qp = p$, $\forall p \in \mathbb{P}_n$
(ii) Q est un opérateur *local* : le coefficient $\mu_\alpha(f)$ est une forme linéaire qui ne dépend que des valeurs de f dans un voisinage de $supp(B_\alpha)$.

Voici le plan de l'article : dans la première partie, je donne différents exemples de quasi-interpolants splines en dimension 1 et 2. Je me limite ici aux QI *quadratiques de classe C^1 sur une partition uniforme* de la droite ou du plan, afin de simplifier la présentation. Mais il est possible de définir des QI de tous les degrés sur une subdivision quelconque d'un intervalle arbitraire en dimension 1. En dimension 2, on peut aussi définir des QI de tous degrés sur certaines triangulations. Je renvoie aux références (section 8) pour de plus amples informations. Dans la deuxième partie, je donne quelques applications des quasi-interpolants quadratiques, d'abord en dimension 2 à l'approximation d'une fonction et de ses dérivées partielles et à la recherche de ses points stationnaires, puis en dimension 1 à l'intégration et à la dérivation approchées d'une fonction, à une méthode pseudo-spectrale pour la résolution approchée d'une équation différentielle, et enfin à l'approximation des zéros d'une fonction.

2 Quasi-interpolant splines quadratiques sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{F} = C^2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}, \tau)$ l'espace des *splines quadratiques* de classe C^1 sur la subdivision uniforme $\tau = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Une fonction de $\mathbb{S}$ est dans $C^1(\mathbb{R})$ et sa restriction à chaque intervalle $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ est dans $\mathbb{P}_2$. Désignons par $B(x)$ la *B-spline quadratique* de support $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ centré en 0, et posons $B_k(x) = B(x - k)$: on a donc $supp(B_k) = [k - \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}]$. Schoenberg [**?**] a démontré que toute spline quadratique $g \in \mathbb{S}$ s'écrit sous la forme :

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(g(k) - \frac{1}{8} D^2 g(k) \right) B_k(x). \tag{1}$$

On a bien sûr $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{S}$ et les premiers monômes s'expriment de la manière suivante dans la base des B-splines (les *monômes* sont notés $e_r(x) = x^r, \forall r \geq 0$) :

$$e_0(x) = 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(x), \quad e_1(x) = x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k B_k(x), \quad e_2(x) = x^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(k^2 - \frac{1}{4} \right) B_k(x). \tag{2}$$

2.1 Quasi-interpolant discret

D'après (1), on peut définir un premier opérateur Q de $\mathbb{F} = C^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}, \tau)$ par

$$Qf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(f(k) - \frac{1}{8} D^2 f(k) \right) B_k(x). \tag{3}$$

C'est un QI car il est exact sur $\mathbb{P}_2$ et la forme linéaire $\mu_k(f) = f(k) - \frac{1}{8} D^2 f(k)$ n'utilise que les valeurs de f et de $D^2 f$ au point k, centre de $supp(B_k)$. On l'appelle *quasi-interpolant différentiel* (abr. DQI) et de plus c'est un *projecteur* sur $\mathbb{S}$ car $Qg = g$ pour tout $g \in \mathbb{S}$.

Une *première variante* consiste à remplacer $D^2 f(k)$ par la *différence seconde centrée*

$$\delta^2 f(k) = f(k-1) - 2f(k) + f(k+1).$$

On obtient ainsi un second opérateur Q^* de $\mathbb{F} = C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}, \tau)$:

$$Q^* f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(f(k) - \frac{1}{8} \delta^2 f(k) \right) B_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_k^*(f) B_k(x), \tag{4}$$

où

$$\mu_k^*(f) = \frac{1}{8} \left(-f(k-1) + 10 f(k) - f(k+1) \right).$$

Comme D^2 coïncide avec δ^2 sur $\mathbb{P}_2$, Q^* *est aussi exact sur* $\mathbb{P}_2$ et c'est un *opérateur local* car $\mu_k^*(f)$ n'utilise que les valeurs de f aux trois points entiers de $supp(B_k)$, mais *ce n'est plus un projecteur* sur $\mathbb{S}$. On l'appelle *quasi-interpolant discret* (abr. dQI).

On peut calculer exactement la *norme infinie* de Q^*. Il suffit d'écrire $Q^* f$ sous la forme:

$$Q^* f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \tilde{B}_k(x),$$

où $\tilde{B}_k$ désigne la *fonction fondamentale*

$$\tilde{B}_k = \frac{1}{8} \left(-B_{k-1} + 10 B_k - B_{k+1} \right).$$

On montre alors facilement que $\|Q^*\|_\infty$ est égale à la norme de Tchebychev de la *fonction de Lebesgue* Λ^* de l'opérateur :

$$\|Q^*\|_\infty = |\Lambda^*|_\infty, \quad \text{où} \quad \Lambda^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\tilde{B}_k|.$$

Par un calcul simple, on obtient

$$\|Q^*\|_\infty = \frac{5}{4} = 1.25.$$

Avec les notations suivantes:

$$|g|_{\infty,k} = \max\{|g(x)|,\, x \in [k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]\} \quad \text{et} \quad d_k(f,\mathbb{P}_2) = \inf\{|f-p|_{\infty,k} \,:\, p \in \mathbb{P}_2\},$$

on montre (voir par exemple [5]) que pour tout $f \in C(\mathbb{R})$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$|Q^*f - f|_{\infty,k} \leq (1 + \|Q^*\|_\infty) d_k(f,\mathbb{P}_2) = 2.25\, d_k(f,\mathbb{P}_2).$$

Ceci montre que Q^*f est très proche de la meilleure approximation polynômiale de f dans chaque intervalle. On en déduit que sur la subdivision $h\mathbb{Z}$, on a, pour une fonction $f \in C^3(\mathbb{R})$,

$$|Q^*f - f|_\infty = O(h^3).$$

2.2 Quasi-interpolant intégral

On va définir maintenant une *2ème variante* du quasi-interpolant Q. Pour cela, on utilise les trois premiers *moments* [38] de la B-spline quadratique B_k:

$$m_k^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} B_k(x)dx = 1, \quad m_k^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} xB_k(x)dx = k, \quad m_k^{(2)} = \int_{\mathbb{R}} x^2 B_k(x)dx = k^2 + \frac{1}{4}.$$

Soit $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$ et soit $\bar{Q}$ le QI intégral suivant:

$$\bar{Q}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \bar{B}_k\rangle B_k,$$

où $\bar{B}_k = \frac{1}{4}\left(-B_{k-1} + 6B_k - B_{k+1}\right)$. On vérifie facilement que $\bar{Q}e_r = e_r$ pour $r = 0, 1$. Comme $\langle e_2, \bar{B}_k\rangle = \frac{1}{4}\left(-m_{k-1}^{(2)} + 6m_k^{(2)} - m_{k+1}^{(2)}\right) = k^2 - \frac{1}{4}$, d'après (2) on obtient également

$$\bar{Q}e_2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^2 - \frac{1}{4}) B_k = e_2,$$

donc $\bar{Q}$ est *exact sur* $\mathbb{P}_2$ et c'est un *opérateur local*. On l'appelle *quasi-interpolant intégral* (abr. iQI). On peut également écrire $\bar{Q}f$ sous la forme

$$\bar{Q}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, B_k\rangle \bar{B}_k,$$

ce qui montre que l'information sur f est obtenue au moyen des *moyennes locales pondérées*

$$\bar{\mu}_k(f) = \langle f, B_k\rangle = \int_{k-3/2}^{k+3/2} f(x)B_k(x)\,dx.$$

En introduisant la fonction de Lebesgue $\bar{\Lambda} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\bar{B}_k|$, on peut montrer que

$$\|\bar{Q}\|_\infty = |\bar{\Lambda}|_\infty = \frac{11}{8} = 1.375.$$

On peut aussi approcher $\bar{\mu}_k(f)$ par des formules de quadrature de type Gauss associées à la fonction de poids $B_k(x)$ (cf [7][**?**][**?**]). Voir aussi [18]

3 Quasi-interpolants splines quadratiques sur une triangulation uniforme du plan

Soit τ la *triangulation uniforme de type II* du plan obtenue en traçant les deux diagonales dans tous les carrés de sommets les points de $(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})^2$. Les centres de ces carrés sont donc les points de $\mathbb{Z}^2$. On note $\varepsilon_1=(1,0)$ et $\varepsilon_2=(0,1)$ les vecteurs unitaires, et l'on pose $\varepsilon_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2=(1,1)$ et $\varepsilon_4=-\varepsilon_1+\varepsilon_2=(-1,1)$. Comme les arêtes du réseau sont parallèles à ces directions, on parle de réseau à 4 directions (4-direction mesh). Soit $\mathbb{S}=S_2^1(\mathbb{R}^2,\tau)$ l'espace des *splines quadratiques de classe* C^1 sur la triangulation τ. Il existe une *box-spline* $B\in\mathbb{S}$ dont le support est *l'octogone* centré à l'origine de sommets $\{\pm\frac{1}{2}(3\varepsilon_1\pm\varepsilon_2),\pm\frac{1}{2}(3\varepsilon_2\pm\varepsilon_1)\}$. L'espace $\mathbb{S}$ est engendré par les *translatées entières* de B:

$$\mathcal{B}=\{B_\alpha(x)=B(x-\alpha)\,;\,\alpha\in\mathbb{Z}^2\}.$$

On a évidemment $\mathbb{P}_2\subset\mathbb{S}$. De plus, $\mathcal{B}$ est une partition de l'unité, $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}B_\alpha=1$, et $\int B_\alpha=1$. En revanche, la famille $\mathcal{B}$ *n'est pas linéairement indépendante* : cette propriété, qui s'avère assez gênante pour l'interpolation ou l'approximation au sens des moindres carrés, ne joue aucun rôle dans la construction des QI ci-dessous (voir par exemple [1][2][3][21][22][23][10] citeSab2[55]).

3.1 Quasi-interpolant discret

Soit Δf le laplacien de f. Un *premier* QI *différentiel* Q ([10], chapitre VI) est défini par

$$Qf=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\{f(\alpha)-\frac{1}{8}\Delta f(\alpha)\}B_\alpha.$$

A partir des représentations des monômes $e_{rs}(x)=x_1^r x_2^s$ de $\mathbb{P}_2$ en fonction des B-splines:

$$e_{00}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}B_\alpha,\quad e_{10}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\alpha_1B_\alpha,\quad e_{01}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\alpha_2B_\alpha,\tag{5}$$

$$e_{11}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\alpha_1\alpha_2,B_\alpha,\quad e_{20}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}(\alpha_1^2-\frac{1}{4})B_\alpha,\quad e_{02}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}(\alpha_2^2-\frac{1}{4})B_\alpha,\tag{6}$$

on vérifie que Q est *exact sur* $\mathbb{P}_2$, i.e. $Qp=p$ pour tout $p\in\mathbb{P}_2$. A partir de ce QI différentiel, on peut, comme dans le cas d'une variable, définir un QI *discret* et un QI *intégral* qui sont aussi exacts sur $\mathbb{P}_2$.

Pour construire le QI discret Q^*, on remplace $\Delta f(\alpha)$ par le schéma aux différences classique à 5 points, centré au point α :

$$\Delta^*f(\alpha)=-4f(\alpha)+\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2}[f(\alpha+\varepsilon_i)+f(\alpha-\varepsilon_i)],$$

qui vérifie

$$\Delta^*p(\alpha)=\Delta p(\alpha),\quad\forall p\in\mathbb{P}_2.$$

Le QI *discret associé* s'écrit alors:

$$Q^*f=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\{f(\alpha)-\frac{1}{8}\Delta^*f(\alpha)\}B_\alpha=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\mu_\alpha^*(f)B_\alpha\tag{7}$$

dont les formes linéaires coefficients sont données par :

$$\mu_\alpha^*(f) = \frac{3}{2}f(\alpha) - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2}[f(\alpha+\varepsilon_i) + f(\alpha-\varepsilon_i)].$$

On démontre que $\|Q^*\|_\infty = \frac{3}{2}$, par conséquent *l'ordre d'approximation* d'une fonction f, de classe C^3 par exemple, est égal à 3. En effet on a, dans chaque triangle T de la triangulation:

$$|Q^*f - f|_{\infty,T} \leq (1 + \|Q^*\|_\infty) d_T(f, \mathbb{P}_2) = \frac{5}{2} d_T(f, \mathbb{P}_2)$$

avec

$$d_T(f, \mathbb{P}_2) = \inf\{|f-p|_{\infty,T} : p \in \mathbb{P}_2\}.$$

Donc si $diam(T) \leq h$ pour tout $T \in \tau$ et si f est de classe C^3, on a

$$|Q^*f - f|_\infty = O(h^3).$$

On remarque que Q^*f est localement très proche de la meilleure approximation de f dans $\mathbb{P}_2$. Voir la section 4 ci-dessous pour des résultats plus précis.

3.2 Quasi-interpolant intégral

On peut également construire un QI *intégral* $\bar{Q}$ en utilisant les moments d'ordre ≤ 2 de la spline B_α (référence Chui ??) :

$$m_\alpha^{(0,0)} = \int_{\mathbb{R}^2} B_\alpha = 1, \quad m_\alpha^{(1,1)} = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 B_\alpha = \alpha_1\alpha_2,$$

$$m_\alpha^{\varepsilon_r} = \int_{\mathbb{R}^2} x_r B_\alpha = \alpha_r, \quad m_\alpha^{2\varepsilon_r} = \int_{\mathbb{R}^2} x_r^2 B_\alpha = \alpha_r^2 + \frac{1}{4},\ r = 1, 2.$$

On définit alors le QI $\bar{Q}$ par

$$Qf = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} \langle f, \bar{B}_\alpha\rangle B_\alpha,$$

$\bar{B}_\alpha$ étant la fonction définie par

$$\bar{B}_\alpha = 2B_\alpha - \frac{1}{4}\{B_{\alpha-\varepsilon_2} + B_{\alpha-\varepsilon_1} + B_{\alpha+\varepsilon_1} + B_{\alpha+\varepsilon_2}\}.$$

On vérifie alors facilement, en utilisant les représentations (5) et (6) des monômes, que $\bar{Q}$ est *exact sur* $\mathbb{P}_2$ et que $\|\bar{Q}\|_\infty \leq 3$. De plus, $\bar{Q}$ est *local* car le coefficient de B_α n'utilise que des *moyennes locales pondérées* de f dans la réunion des supports des 5 box-splines centrés au point α et en ses 4 voisins immédiats. Ces moyennes sont toutes du type

$$\int_{\mathbb{R}^2} B_\gamma(x) f(x)\, dx$$

et peuvent être approchées par les formules de quadratures de Gauss associées au poids B_γ. On obtient ainsi de nouvelles familles de QI discrets basés sur les points de Gauss.

4 Application : approximation d'une fonction de deux variables et de ses dérivées partielles

On va utiliser le QI quadratique discret (7) de f sur $\mathbb{R}^2$ vu dans la section 3.1 ci-dessus :

$$Q^* f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \mu^*_\alpha(f) B_\alpha$$

$$\mu^*_\alpha(f) = \frac{3}{2} f(\alpha) - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{2} [f(\alpha + \varepsilon_i) + f(\alpha - \varepsilon_i)].$$

On sait que Q^* est exact sur $\mathbb{P}_2$ et que $\|Q\|_\infty = 1.5$, donc $Q^* f$ est très proche localement de la meilleure approximation uniforme de f dans $\mathbb{P}_2$. C'est la raison pour laquelle on peut espérer obtenir de bonnes approximations de f et de ses dérivées partielles à partir de ce QI quadratique C^1 (voir aussi [14] et le numéro spécial dans lequel est publié cet article). La plupart des résultats de cette section proviennent de [28]. Dans ce qui suit, on utilise toujours la norme du max.

4.1 Estimations d'erreurs pour f et ses dérivées partielles

Si $f \in C^3(\Omega)$, on démontre les estimations d'erreurs suivantes, avec la notation $\|D^3 f\| = \max\{\|D^\gamma f\|,\ |\gamma| = 3\}$. Pour la fonction, on obtient :

$$\|f - Q^* f\| \leq \frac{19}{48} h^3 \|D^3 f\|.$$

Pour les dérivées partielles premières, avec les notations $D^{\varepsilon_1} = \frac{\partial}{\partial x}, D^{\varepsilon_2} = \frac{\partial}{\partial y}$, on a pour $k = 1, 2.$:

$$\|D^{\varepsilon_k}(f - Q^* f)\|_\Omega \leq \frac{17}{4} h^2 \|D^3 f\|.$$

Enfin, pour les dérivées secondes, avec les notations

$$D^{2\varepsilon_1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D^{2\varepsilon_2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

on obtient :

$$\|D^{2\varepsilon_k}(f - Q^* f)\| \ (k = 1, 2), \quad \text{et} \quad \|D^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(f - Q^* f)\| \leq \frac{41}{4} h \|D^3 f\|.$$

Les constantes indiquées ne sont pas optimales, mais elles en donnent un ordre de grandeur.

4.2 Majorations des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de $Q^* f$

On sait déjà que $\|Q^* f\| \leq \frac{3}{2} \|f\|$. On utilise les notations suivantes pour les dérivées partielles de f et de son approximant $g = Q^* f$:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \ \ q = \frac{\partial f}{\partial y}, \ \ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\pi = \frac{\partial g}{\partial x}, \ \ \chi = \frac{\partial g}{\partial y}, \ \ \rho = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \ \ \sigma = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \ \tau = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

Comme π et χ sont affines par triangle, il suffit de les majorer aux sommets de ces triangles, c'est à dire aux sommets et aux centres des carrés du réseau. On obtient les majorations suivantes:

$$\|\pi\| \text{ et } \|\chi\| \leq 2 \max\{\|p\|, \|q\|\}.$$

De même, en calculant les dérivées partielles d'ordre 2 de Q^*f, constantes dans chaque triangle de la triangulation, on obtient les majorations suivantes:

$$\|\rho\|, \|\sigma\|, \|\tau\| \leq \frac{25}{8} \max\{\|r\|, \|s\|, \|t\|\}$$

On voit donc que l'approximation de f par Q^*f ne dilate pas trop la fonction et ses premières dérivées partielles. Pour ces calculs, on utilise les résultats de la prépublication [44].

4.3 Superconvergence en certains points

Supposons que la fonction f ait des d.p. d'ordre 4 bornées. Alors on observe que l'on a, au *centre*, aux *sommets* et aux *milieux des côtés* d'un carré:

$$f - Q^*f = O(h^4).$$

Comme l'erreur est en général en $O(h^3)$, on a donc un phénomène de *superconvergence* en ces points. En revanche, pour les d.p. premières, on n'a pas ce phénomène aux mêmes points, mais il est probable qu'il se produise en certains points intérieurs du carré.
Pour les d.p. secondes, on a des résultats qui dépendent de l'orientation des triangles. Par exemple, pour les d.p. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur les triangles Nord (N) et Sud (S), on a un phénomène de *superconvergence* :

$$(r-\rho)|_N = (r-\rho)|_S = \frac{h^2}{24} D^{40} f(0) + O(h^4).$$

Sur les triangles Est(E) et Ouest (W), en posant $e_{20}|_E = (r-\rho)|_E$ et $e_{20}|_W = (r-\rho)|_W$, on obtient

$$e_{20}|_E = \frac{h}{2}[D^{30}f(0) - D^{12}f(0)] + O(h^2), \quad e_{20}|_W = \frac{h}{2}[-D^{30}f(0) + D^{12}f(0)] + O(h^2),$$

d'où une *superconvergence* pour la moyenne

$$\frac{1}{2}(e_{20}|E + e_{20}|W) = O(h^2).$$

On a des résultats analogues pour les autres dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Exemple: erreur sur le gradient de $f(x,y) = exp(x^2+y^2)$.
On donne des résultats sur l'erreur maximale $|grad(f - Qf)|$ respectivement au centre et aux sommets du carré $[-0.5, 0.5]^2$ (on a ici $h = \frac{1}{N}$):

N	*erreur centre*	*erreur sommets*
8	$2.61-04$	$4.84-03$
16	$1.62-04$	$2.15-03$
32	$7.24-05$	$7.09-04$
64	$2.45-05$	$2.04-04$

4.4 Un algorithme pour la détermination des points stationnaires de $g = Q^*f$

Compte tenu des résultats ci-dessus sur l'approximation des dérivées de f par celles de Q^*f, on propose l'algorithme suivant pour la *recherche des points stationnaires* de Q^*f qui sont à priori voisins des points stationnaires de f.

• Calculer $\pi = \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\chi = \frac{\partial g}{\partial y}$ aux sommets de la triangulation $\mathcal{T}$. Rappelons que ces deux fonctions sont continues et *affines par morceaux*, par conséquent elles sont entièrement déterminées par ces valeurs.

• Sélectionner le sous-ensemble $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ des triangles dans lesquels la *somme des signes* de π (par exemple) est ± 1

• Sélectionner le sous-ensemble $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}'$ des triangles dans lesquels la *somme des signes* de χ est ± 1.

• Dans chaque triangle de $\mathcal{T}''$, *résoudre le système d'équations linéaires* $\pi = \chi = 0$.

On obtient ainsi les *points stationnaires* du quasi-interpolant $g = Qf$.

On peut alors faire une *étude locale* plus précise dans chaque triangle de la triangulation $\mathcal{T}''$ où se trouve un point stationnaire. Rappelons que les d.p. secondes ρ, σ et τ de g sont *constantes* dans chaque triangle.

• Etudier le signe de $H = \sigma^2 - \rho\tau$.
$\star$ si $H < 0$, et si $\rho > 0$ (donc $\tau > 0$), alors g a un *minimum local*.
$\star$ si $H < 0$, et si $\rho < 0$ (donc $\tau < 0$), alors g a un *maximum local*.
$\star$ si $H \geq 0$, on a un *point-selle* ou un *point dégénéré*.

Remarque: on peut évidemment permuter les rôles de π et χ dans l'algorithme.

Voici quelques exemples détaillés dans [28].

Exemple 1: $f(x,y) = exp(x^2 + y^2)$.
On détecte facilement l'*unique minimum* de f en $M_0 = (0,0)$.

Exemple 2 : $f(x,y) = \frac{3}{4}exp(-\frac{1}{4}((9x-2)^2 + (9y-2)^2)) + \frac{3}{4}exp(-(\frac{1}{49}(9x+1)^2 + \frac{1}{10}(9y+1)^2)) + \frac{1}{2}exp(-\frac{1}{4}((9x-7)^2 + (9y-3)^2)) - \frac{1}{5}exp(-((9x-4)^2 + (9y-7)^2))$ (fonction de Franke [29]).

On détecte bien les 5 *points stationnaires* de f dans le carré $[0,1]^2$:
$\star$ le minimum local: $M_0 = (0.461, 0.783)$,
$\star$ les maxima locaux: $M_1 = (0.207, 0.209)$ et $M_2 = (0.752, 0.327)$,
$\star$ les points-selle ou dégénérés: $M_3 = (0.561, 0.256)$ et $M_4 = 0.621, 0.871)$

Exemple 3 : $f(x,y) = 100((x+1)^2 - (y+1))^2 + x^2$ (fonction de Rosenbrock [8]).
On détecte assez difficilement (évidemment, à cause de la forme de la vallée) l'*unique minimum* de g en $M_0 = (0,0)$.

5 Application : formule de quadrature en dimension 1 associée à un QI quadratique discret

Supposons que $I = [a,b] = [0, nh]$ et posons $t_{-2} = t_{-1} = a$, $t_i = ih$ pour $0 \leq i \leq n$, $t_{n+1} = t_{n+2} = b$, puis $\theta_0 = a, \theta_{n+1} = b$, et $\theta_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i)$, pour $1 \leq i \leq n$. Dans ce cas il existe $n+2$ B-splines $\{B_k,\ 0 \leq k \leq n+1\}$, de supports $supp(B_k) = [t_{k-2}, t_{k+1}]$ formant une base de l'espace des splines quadratiques sur la partition uniforme de I [1][5][12]. Les *données* sont ici les valeurs $f_i = f(\theta_i), 0 \leq i \leq n+1$. Le QI discret Q^* s'écrit alors sous la forme:

$$Q^* f = f_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k^*(f) B_k + f_{n+1} B_{n+1}$$

où les deux premières et les deux dernières formes coefficients sont :

$$\mu_0^*(f) = f_0, \;\; \mu_1^*(f) = \frac{h}{6}\left(-2f_0 + 9f_1 - f_2\right), \quad \mu_n^*(f) = \frac{h}{6}\left(-f_{n-1} + 9f_n - 2f_{n+1}\right), \;\; \mu_{n+1}^*(f) = f_{n+1},$$

et, pour $2 \leq k \leq n-1$:

$$\mu_k^*(f) = \frac{h}{8}\left(-f_{k-1} + 10f_k - f_{k+1}\right).$$

Comme $Q^* f$ est une excellente approximation de f sur I, on peut espérer une bonne approximation de $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f$ par $\mathcal{I}_2(f) = \int_a^b Q^* f$. En intégrant $Q^* f$, on obtient la formule de quadrature suivante, pour $n \geq 5$:

$$\mathcal{I}_2(f) = \int_a^b Q^* f = \frac{h}{9} f_0 + \frac{7h}{8} f_1 + \frac{73h}{72} f_2 + h \sum_{i=3}^{n-2} f_i + \frac{73h}{72} f_{n-1} + \frac{7h}{8} f_n + \frac{h}{9} f_{n+1}.$$

On démontre le résultat d'erreur suivant [47] : il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tout $f \in C^4(I)$:

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2(f) = C_1 h^4 f^{(4)}(\gamma_1), \quad \gamma_1 \in I.$$

Cette formule est "complémentaire" de la formule de Simpson. Pour celle-ci, il existe $C_2 > 0$ tel que, pour tout $f \in C^4(I)$:

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2^*(f) = -C_2 h^4 f^{(4)}(\gamma_2), \quad \gamma_2 \in I.$$

Bien que $\gamma_1 \neq \gamma_2$ en général, en pratique on observe que les erreurs sont presque toujours de *signes opposés*. De plus, les constantes vérifient $0 < C_1 < C_2 = \frac{1}{180}$.

Exemple [49][50] : Comparons les résultats numériques obtenus en approchant les deux intégrales suivantes par les deux formules de quadrature $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_2^*$:

$$\mathcal{I}(f_1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+16x^2}\, dx \;\text{ et }\; \mathcal{I}(f_2) = \int_{-1}^{1} e^{-x} sin(5\pi x)\, dx.$$

En posant respectivement $E_2(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2(f)$, $E_2^*(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2^*(f)$, on obtient les résultats suivants (la notation $0.73(-9)$ signifie 0.73×10^{-9}) :

n	$E_2^*(f_1)$	$E_2(f_1)$	$E_2^*(f_2)$	$E_2(f_2)$
128	$0.73(-9)$	$-0.55(-9)$	$0.14(-6)$	$-0.11(-6)$
256	$0.45(-10)$	$-0.33(-10)$	$0.90(-8)$	$-0.67(-8)$
512	$0.28(-11)$	$-0.21(-11)$	$0.56(-9)$	$-0.41(-9)$
1024	$0.18(-12)$	$-0.13(-12)$	$0.73(-9)$	$-0.52(-9)$

On voit que les erreurs sont de signes opposés et ont des valeurs absolues du même ordre de grandeur.

6 Calculs de dérivées et méthodes pseudo-spectrales

6.1 Matrice de dérivation

En dérivant $g = Q^* f$, et en posant $g'_i = g(\theta_i)$, $0 \leq i \leq n+1$, on obtient les formules de dérivation suivantes.

$$hg'_0 = \frac{1}{3}(-8f_0+9f_1-f_2), \quad hg'_1 = \frac{1}{48}(-56f_0+33f_1+26f_2-3f_3), \quad hg'_2 = \frac{1}{48}(8f_0-36f_1+f_2+30f_3-3f_4),$$

et des formules antisymétriques pour hg'_{n-1}, hg'_n et hg'_{n+1}. Pour $3 \leq i \leq n-2$, i.e. pour les *points intérieurs*, on a:

$$hg'_i = \frac{1}{16}(f_{i-2} - 10f_{i-1} + 10f_{i+1} - f_{i+2}).$$

Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n+2}$ et $\mathbf{g}' \in \mathbb{R}^{n+2}$ les vecteurs de composantes respectives f_i et g'_i, pour $0 \leq i \leq n+1$. On peut écrire l'égalité matricielle :

$$\mathbf{g}' = \mathbf{Df},$$

où $\mathbf{D}$ est la *matrice de dérivation* :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -8/3 & 3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -7/6 & 11/16 & 13/24 & -1/16 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/6 & -3/4 & 1/48 & 5/8 & -1/16 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & -5/8 & 0 & 5/8 & -1/16 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1/16 & -5/8 & 0 & 5/8 & -1/16 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/16 & -5/8 & -1/48 & 3/4 & -1/6 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/16 & -13/24 & -11/16 & 7/6 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -3 & 8/3 \end{bmatrix}$$

6.2 Erreur sur la dérivée

Si l'on suppose f suffisamment dérivable, on a les estimations d'erreur suivantes.

Pour $3 \leq i \leq n-2$, on obtient

$$g'_i - f'_i = \frac{h^2}{24} f_i^{(3)} + O(h^4).$$

A l'origine et au premier point intérieur, on a respectivement :

$$g'_0 - f'_0 = -\frac{h^2}{8} f_0^{(3)} + O(h^3), \quad \text{et} \quad g'_1 - f'_1 = \frac{h^2}{32} f_1^{(3)} + O(h^3).$$

(et des résultats analogues à la borne supérieure de l'intervalle).

Exemple [49] : considérons les deux fonctions $f_1(x) = (1+16x^2)^{-1}$ et $f_2(x) = e^{-x} \sin(5\pi x)$ sur l'intervalle $I = [-1, 1]$. Pour $p = 1, 2$, on pose $\varepsilon_p = \max |f'_p(\theta_i) - g'_p(\theta_i)|$ et $\varepsilon^*_p = \max |f'_p(\theta_i) - \delta f_p(\theta_i)|$, où $\delta f_p(\theta_i)$ est la différence centrée de f_p au point θ_i (avec les modifications usuelles aux extrémités de I). On obtient les résultats suivants :

n	ε_1	ε_1^*	ε_2	ε_2^*
64	1.4(−2)	4.8(−2)	1.6(−2)	4.6(−2)
128	3.1(−3)	1.2(−2)	3.7(−3)	1.2(−2)
256	7.7(−4)	3.0(−3)	8.7(−4)	2.9(−3)
512	1.9(−4)	7.6(−4)	2.1(−4)	7.2(−3)
1024	4.7(−5)	1.9(−4)	5.2(−5)	1.8(−4)

On voit que les erreurs sont en $O(h^2)$, mais celles obtenues par le QI sont 3 à 4 fois plus faibles que celles fournies par la différence centrée.

6.3 Méthode pseudo-spectrale

Supposons que l'on veuille résoudre le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$u''(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in I = (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0,$$

où l'on suppose par exemple f continue. Il est facile de montrer (voir par exemple [13] ou [6]) que le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ des valeurs approchées de $u(\theta_i)$, pour $1 \le i \le n$, est solution du système linéaire

$$\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

où $\mathbf{f}$ est le vecteur de composantes $f(\theta_i)$ et $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la sous-matrice formée des lignes et colonnes numérotées de 1 à n de la matrice $\mathbf{D}^2$.

Exemple 1 : choisissons $f_1(x) = 12x^2 - 4$ qui correspond à la solution $u_1(x) = (1 - x^2)^2$, et $f_2(x) = e^{4x}$ qui correspond à la solution $u_2(x) = (e^{4x} - \sinh(4)x - \cosh(4))/16$. Pour $p = 1, 2$, on pose respectivement $\varepsilon_p = \max\{|\mathbf{u}_p(i) - u_p(\theta_i)|, 1 \le i \le n\}$, où $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}_p = \mathbf{f}_p$. On obtient les résultats suivants :

n	20	40	60	80	100
ε_1	1.0(−2)	2.5(−3)	1.1(−3)	6.0(−4)	4.0(−4)
ε_2	3.4(−2)	7.8(−3)	3.4(−3)	1.9(−3)	1.2(−3)

Les deux lignes font apparaître clairement une erreur en $O(h^2)$. On peut améliorer ces résultats de façon significative en choisissant des subdivisions adaptées. Les résultats obtenus seront publiés ultérieurement.

7 Application : recherche de zéros

On peut approcher les zéros d'une fonction f par ceux du QI spline $g = Q^*f$ qui sont calculables *exactement* car g est quadratique par morceaux.

Exemple : Approximation des zéros du polynôme de Legendre $f = P_8$ sur $I = [-1, 1]$ par ceux du QI g. Les zéros de P_8 sont $\{\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \pm x_4\}$, avec $x_1 \approx 0.1834$, $x_2 \approx 0.5255$, $x_3 \approx 0.7967$, $x_4 \approx 0.9603$.
Voici les erreurs sur les zéros (en valeur absolue) pour différentes valeurs de n.

n	8	16	32	64	128	256
e_1	1.5−2	5.4−4	4.3−5	1.3−5	2.0−6	3.6−8
e_2	2.7−2	3.8−3	2.1−4	1.2−5	1.3−6	3.6−7
e_3	1.1−1	1.2−2	5.6−4	4.3−5	3.3−6	9.2−8
e_4	4.4−2	6.6−3	3.1−4	9.3−5	4.5−6	5.4−7

8 Généralisations et développements

Le présent survol n'est qu'une introduction aux QI quadratiques en dimensions 1 et 2, sur des partitions uniformes, et à quelques applications. Pour les extensions à d'autres degrés et à des partitions non uniformes, on peut consulter par exemple les livres généraux [1][2][3][4][5][12], les survols [16][17][45][49] et les articles [19][19][25] [26][28][31][32][33][35][53]. Plus récemment, nous avons défini des QI à deux variables sur des triangulations quelconques de type Powell-Sabin [41][36][37] en utilisant les B-splines introduites par Dierckx [27].

9 Bibliographie

9.1 Abréviations: journaux et éditeurs

ACHA=Appl. & Comput. Harmonic Anal. (journal).
AiCM=Advances in Comput. Math. (journal). AKP=A.K. Peters, Wellesley.
AMS=American Mathematical Society. AP=Academic Press, London, New-York.
ATA=Approximation Theory & Applications, ou Analysis in Theory & Applications (journal). BC=Brooks/Cole Publ. BV=Birkhäuser Verlag, Basel.
CAGD=Comput. Aided Geom. Design. (journal). CUP=Cambridge University Press.
IMAJNA=IMA J. Numer. Anal. (journal).
IRMAR=Institut de Recherche Mathématique de Rennes.
ISNM=International Series on Numerical Mathematics (BV).
JAT=Journal of Approx. Theory. (journal). JCAM=J. Comput. Appl. Math. (journal).
JWS=John Wiley & Sons. K=Kluwer, Dordrecht.
M^2AN=Math. Modelling and Numer. Anal. (journal).
MC=Math. of Comput. (journal). OUP=Oxford University Press.
SIAM=Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
SV=Springer-Verlag, Berlin.

References

9.2 Livres

[1] B.D. Bojanov, H.A. Hakopian, A.A. Sahakian, *Spline functions and multivariate interpolation*, K 1993.

[2] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider : *Box-splines*. SV 1993.

[3] C.K. Chui : *Multivariate splines*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 54, SIAM 1988.

[4] W. Cheney, W. Light : *A course in approximation theory*. BC 2000.

[5] R. DeVore, G.G. Lorentz : *Constructive Approximation*. SV 1993.

[6] B. Fornberg : *A practical guide to pseudospectral methods*. CUP 1998.

[7] W. Gautschi : *Orthogonal polynomials*. OUP 2004.

[8] Ph.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright : *Practical Optimization*. AP 1997.

[9] M.J.D. Powell : *Approximation theory and methods*, CUP 1980.

[10] P. Sablonnière : *Bases de Bernstein et approximants splines*. Thèse d'état, Lille, 1982.

[11] I.J. Schoenberg : *Cardinal spline interpolation*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 12, SIAM 1973.

[12] L.L. Schumaker : *Spline functions : basic theory*. JWS 1981.

[13] L. Trefethen : *Spectral methods in Matlab*, SV 2000.

9.3 Articles

[14] H. Akima : On estimating partial derivatives for bivariate interpolation of scattered data. Rocky Mountains J. Math. **14**, No 1 (1984) 41-75.

[15] E. Arge, M. Daehlen : Grid point interpolation on finite regions using C^1 box splines. SIAMJNA **29**, No 4 (1992) 1136-1153.

[16] C. de Boor : Splines as linear combinations of B-splines. In *Approximation Theory II*, G.G. Lorentz et al. (eds), AP (1976) 1-47.

[17] C. de Boor : Quasi-interpolants and approximation power of multivariate splines. In *Computation of curves and surfaces*, W. Dahmen et al. (eds), K (1990) 313-345.

[18] C. de Boor, T. Lyche, L.L. Schumaker : On calculating with B-splines II, Integration. in *Numerische Methoden der Approximationstheorie*, (Eds. L. Collatz & al.), ISNM Vol. 30, BV (1976) 123-146.

[19] C.K. Chui, M.J. Lai : A multivariate analog of Marsden's identity and a quasi-interpolation scheme. CA **3** (1987) 111-122.

[20] C.K. Chui, M.J. Lai : Computation of box splines and B-splines on triangulations of nonuniform rectangular partitions. ATA **3** (1987) 37-62.

[21] C.K. Chui, L.L. Schumaker, R.H. Wang, On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions III. Type II triangulations. In: *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, Vol. **3**, AMS (1983), 67-80.

[22] C.K. Chui, R.H. Wang, On a bivariate B-spline basis, Scientia Sinica **XXVII**, No 11 (1984), 1129-1142.

[23] C.K. Chui, R.H. Wang, Concerning C^1 B-splines on triangulations of nonuniform rectangular partitions, ATA **1** (1984), 11-18.

[24] M. Daehlen, T. Lyche : Bivariate interpolation with quadratic box-splines. MC **51**, No 183 (1988) 219-230.

[25] C. Dagnino, P. Lamberti : Some performances of local bivariate quadratic C^1 quasi-interpolating splines on non-uniform type-2 triangulations. JCAM **173** (2005) 21-37.

[26] C. Dagnino, P. Sablonnière : Error analysis for quadratic spline quasi-interpolants on non-uniform criss-cross triangulations of bounded rectangular domains. Article soumis.

[27] P. Dierckx : On calculating normalized Powell-Sabin B-splines. CAGD **15** (1997) 61-78.

[28] F. Foucher, P. Sablonnière : Approximating partial derivatives of first and second order by quadratic spline quasi-interpolants. Congrès MAMERN, Oujda, Maroc, 9-11 mai 2005. Prépublication IRMAR en préparation.

[29] R. Franke : Scattered data interpolation : tests of some methods. MC **38** (1982) 181-200.

[30] W. Gautschi, L. Gori, F. Pitolli : Gauss quadrature for refinable weight functions. ACHA **8** (2000) 249-257.

[31] T.N.T. Goodman: Total positivity and the shape of curves. In *Total positivity and its applications*. (Eds. M. Gasca & C.A. Micchelli), K (1996) 157-186.

[32] T.N.T. Goodman, S.L. Lee : Spline approximation operators of Bernstein-Schoenberg type in one and two variables. JAT **33** (1981) 248-263.

[33] T.N.T. Goodman, A. Sharma : A modified Bernstein-Schoenberg operator. In *Constructive theory of functions '87*, (Ed. Bl. Sendov), Bulgarian Academy of Science, Sofia (1988) 166-173.

[34] F. Jeeawock-Zedek : Interpolation de Lagrange par des splines quadratiques sur un quadrilatère de $\mathbb{R}^2$. M^2AN **26**, No 5 (1992) 575-594.

[35] T. Lyche, L.L. Schumaker : Local spline approximation methods. JAT 15 (1975) 294-325.

[36] C. Manni, P. Sablonnière : Quadratic spline quasi-interpolants on Powell-Sabin partitions. A paraître dans AiCM (2005).

[37] C. Manni : Shape control in Powell-Sabin quasi-interpolation. Soumis à Proceedings of *Algorithms for Approximation V*, Chester, July 2005.

[38] E. Neumann : Moments and Fourier transforms of B-splines.

[39] J.L. Phillips, R.J. Hanson : Gauss quadrature rules with B-spline weight functions. MC **28** (1974) 18.

[40] M.J.D. Powell : Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting. In *Software for numerical mathematics*, D.J. Evans (ed), AP (1974) 253-271.

[41] M.J.D. Powell, M.A. Sabin : Piecewise quadratic approximation on triangles. ACM Trans. Math. Software **3** (1977) 316-325.

[42] P. Sablonnière : Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximants, CAGD **2** (1985), 29-36.

[43] P. Sablonnière : Error bounds for Hermite interpolation by quadratic splines on an alpha-triangulation. IMAJNA **7** (1987) 495-508.

[44] P. Sablonnière : BB-coefficients of basic bivariate quadratic splines on rectangular domains with uniform criss-cross triangulations. Prépublication IRMAR 02-56, Décembre 2002.

[45] P. Sablonnière : On some multivariate quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains, in: *Modern developments in multivariate approximation* (Eds. Hausmann W., Jetter K., Reiner M. and Stöcker J.), ISNM Vol. **145**, BV (2003) 263-278.

[46] P. Sablonnière : Quadratic spline quasi-interpolants on bounded domain of $R^d, d = 1, 2, 3$, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **61** (2003), 229-246.

[47] P. Sablonnière : Quadratic B-splines on non uniform criss-cross triangulations of bounded rectangular domains of the plane. Prépublication IRMAR 03-14, Mars 2003.

[48] P. Sablonnière : Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **63** No 2 (2005) 107-118.

[49] P. Sablonnière : Recent progress on univariate and multivariate polynomial and spline quasi-interpolants. In *Trends and applications in constructive approximation*, M.G. de Bruijn, D.H. Mache and J. Szabados (eds), ISNM Vol. **151**, BV (2005) 229-245.

[50] P. Sablonnière : Refinement equation and subdivision algorithm for quadratic B-splines on non-uniform criss-cross triangulations. In proceedings of the International Conference *Wavelets and splines*, July 3-8, 2003. St Petersburg University Press (2005) 84-102.

[51] P. Sablonnière : A quadrature formula associated with a quadratic spline quasi-interpolant. Prépublication IRMAR, Novembre 2005.

[52] P. Sablonnière, F. Jeeawock-Zedek : Hermite and Lagrange interpolation by quadratic splines on nonuniform criss-cross triangulations. In *Curves and surfaces*, P.J. Laurent et al. (eds), AKP (1991) 445-452.

[53] P. Sablonnière, D. Sbibih : Spline integral operators exact on polynomials. ATA **10**, No 3 (1994) 56-73.

[54] I.J. Schoenberg : On variation diminishing approximation methods. In*On numerical approximation*, (Ed. R.E. Langer), University of Wisconsin Press, Madison (1959) 249-274.

[55] P.B. Zwart : Multivariate splines with nondegenerate partitions. SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973) 665-673.

Adresse: Paul Sablonnière, Centre de mathématiques,
INSA de Rennes, 20 avenue des Buttes de Coësmes, CS 14315,
35043 Rennes cédex, France.

e-mail : psablonn@insa-rennes.fr